Kleine AG: Die Weil-Vermutungen für K3-Flächen und die Kuga-Satake-Konstruktion

Organisation:
Paul Jonas Hamacher[1]
Bernhard Werner[2]

1. Beweis der Weil-Vermutungen außer der Riemannschen Vermutung (45 Minuten)

Im ersten Vortrag sollen die Weil-Vermutungen erklärt und bis auf die Riemannsche Vermutung bewiesen werden. Im Fall vom Flächen soll außerdem die Riemannsche Vermutung für $i = 0, 1, 3, 4$ erläutert werden.

Der zentrale Punkt für den Beweis ist die Reformulierung in Termen von étaler Kohomologie. Dadurch wirken die Weil-Vermutungen auch weniger mysteriös: Die Form der Zetafunktion erklärt sich durch die Lefschetzsche Fixpunktformel und die Funktionalgleichung durch die Zetafunktion. ([Mil] § 26-27, [Del] § 1)

2. Hodgestrukturen (30 Minuten)

Die Kuga-Satake-Konstruktion ist im Wesentlichen eine Konstruktion, welche gewissen polarisierten Hodgestrukturen vom Gewicht 2 eine polarisierbare Hodgestruktur von Gewicht 1 zuordnet. In diesem Vortrag möchten wir uns mit dem Begriff der Hodgestrukturen vertraut machen.

Definiere (rationale, ganzzahlige) Hodgestrukturen und zeige, dass die Kategorie der Hodgestrukturen äquivalent zur Kategorie der Darstellungen von $\mathbb{S}^1 := \operatorname{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_m$ ist (siehe z.B. [DM] 2.31 oder [Mil3] Abschnitt 2). Gib außerdem einige Beispiele für Hodgestrukturen aus der Geometrie an. Definiere anschließend Polarisierungen von Hodgestrukturen und erläutere die Kategorienäquivalenz zwischen ganzzahligen polarisierbaren Hodgestrukturen vom Gewicht 1 und komplexen algebraischen Varietäten ([Huy] § 3).

3. K3-Flächen (30 Minuten)

Das Ziel dieses Vortrag ist es, K3-Flächen einzuführen und zu erklären, wie man einer polarisierten K3-Fläche eine polarisierte Hodgestruktur zuordnet.

Definiere (und motiviere) K3-Flächen und gibe einige Beispiele an. Schreibe den Hodgediamanten einer K3-Fläche an und beweise ggf. Teile davon. Führe Polarisierungen von K3-Flächen ein und erläutere warum für eine polarisierte K3-Fläche (X, L) über den komplexen Zahlen die Schnittpaarung auf $c_1(L)^\perp \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ eine polarisierte Hodgestruktur vom K3-Typ liefert. ([Huy] § 1, § 3.2, Bsp. 3.1.7)

4. Clifford-Algebren (30 Minuten)

In diesem Vortrag führen wir Clifford-Algebren ein, da wir sie im nächsten Vortrag für die Kuga-Satake-Konstruktion brauchen werden.

[1] `<Nachname>@ma.tum.de`
[2] `<Nachname>@ma.tum.de`

Definiere die Clifford-Algebra $\mathrm{Cl}(V)$ und die Gruppen $\mathrm{CSpin}^+(V)$ und $\mathrm{Spin}(V)$; erkläre das Diagramm (3.2.1) von [Del].Beachte, dass $\mathrm{CSpin}^+(V)$ in Delignes Notation mit $\mathrm{CSpin}(V)$ bezeichnet wird. ([Huy] § 4.1).

5. Die Kuga-Satake-Konstruktion (45 Minuten)

Hier widmen wir uns dem Herzstück dieser kleinen AG – der Kuga-Satake-Konstruktion, welche jeder polarisierten Hodgestruktur vom K3-Typ eine Hodgestruktur vom Gewicht 1 zuordnet und somit jeder (polarisierten) K3-Fläche über $\mathbb{C}$ eine abelsche Varietät zuordnet.

Gib die Konstruktion an, wie sie im Skript von Huybrechts beschrieben wird. Merke insbesondere an, dass die Konstruktion auch noch funktioniert, wenn man die Polarisation durch eine quadatische Form auf V mit gewissen Eigenschaften ersetzt. Erkläre auch, was die Konstruktion in der Sprache von linear algebraischen Gruppen ausssagt. Gebe, falls die Zeit ausreicht, auch einige Beispiele für die Kuga-Satake-Varietät an. ([Huy] § 4.2-3, [Del] §4)

6. Beweis der Riemannsche Vermutung für K3-Flächen (45 Minuten)

Im letzten Vortrag führen wir den Beweis der Weil-Vermutungen für K3-Flächen zum Abschluss.

Schreibe hierzu zunächt Proposition 6.5 aus [Del] an und erläutere, was die Proposition mit der Kuga-Satake-Konstruktion zu tun hat (indem du z.B. den Fall $S = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ betrachtest). Erläre nun, dass man jede K3 Fläche nach Charakteristik 0 liften kann und führe den Beweis zum Abschluss. ([Del] §6)

Anmerkung: An einer Stelle begründet Deligne eine Aussage mit "D'après la théorie de Weil pour A_k". Damit ist die Weil-Vermutung für $H^1(A_k, \mathbb{Q}_l)$ gemeint, d.h. die Eigenwerte (λ_i) des Frobenius haben Betrag $\sqrt{q}$ (z.B. [Mil2] Thm. 1.1). Die Eigenwerte auf der Matrixalgebra $\mathrm{End}\, H^1(A_k, \mathbb{Q}_l)$ sind nun von der Form λ_i/λ_j und haben somit Betrag 1.

Literatur

[Del] P. Deligne: La conjecture de Weil pour les surfaces K3, Inventiones math. 15 (1972), p. 206-226

[DM] P. Deligne, J. S. Milne: Tannakian Categories, `http://www.jmilne.org/math/xnotes/tc.pdf`

[Huy] D. Huybrechts: Lectures on K3 surfaces Daniel Huybrechts, `www.math.uni-bonn.de/people/huybrech/K3Global.pdf`

[Mil] J. S. Milne: Lectures on étale cohomology, `www.jmilne.org/math/CourseNotes/lec.html`

[Mil2] J. S. Milne: Abelian varieties, `www.jmilne.org/math/CourseNotes/av.html`

[Mil3] J. S. Milne: Introduction to Shimura Varieties, `http://www.jmilne.org/math/xnotes/svi.pdf`