KLEINE AG: ENDLICHKEITSSÄTZE FÜR ABELSCHE VARIETÄTEN ÜBER ZAHLKÖRPERN

Organisatoren: Gregor Pohl[1], Johannes Anschütz[2]

Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$, A eine über K definierte abelsche Varietät, $\pi = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ die absolute Galois-Gruppe von K, l eine Primzahl.
Dann operiert π auf dem Tate-Modul

$$T_l(A) = \varprojlim A[l^n](\overline{K}).$$

Ziel dieser kleinen AG ist das Vorstellen nach [4] der Beweise der folgenden Resultate

a) Die Darstellung von π auf $T_l(A) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ is halbeinfach.
c) Die Abbildung

$$\mathrm{End}_K(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \to \mathrm{End}_\pi(T_l(A))$$

ist ein Isomorphismus.
c) Sei S eine endliche Menge von Stellen von K, $d > 0$. Dann gibt es nur endlich viele Isomorphieklassen d-fach polarisierter abelscher Varietäten über K, welche gute Reduktion außerhalb S haben.

a) und b) sind bekannt unter dem Namen Tate-Vermutung, c) als Shafarevich-Vermutung. Weiter weiß man, dass aus c) die Mordell-Vermutung folgt (§6). Die Tate-Vermutung ist von Tate selbst für abelsche Varietäten über endlichen Körpern gezeigt worden ([8]).

Der Beweis für c) erfolgt so, daß zunächst nur die Endlichkeit für Isogenie-Klassen gezeigt wird. Der Rest des Beweises von c) benutzt dann eine Variante der bei a) und b) verwendeten Methoden. Zusätzliche Informationen lassen sich dabei den entsprechenden Stelle in [1] und [2] entnehmen.

Die kleine AG beginnt zunächst mit einigen technischen Details über Höhen (§3). Die Komplikationen in §2 ergeben sich daraus, daß wir nicht die voll entwickelte Stärke der Modulräume semiabelscher Varietäten benutzen ([5],[7]). Danach werden die sehr schönen Ergebnisse von Tate über p-divisible Gruppen benutzt (§4), die Gegenstand einer vorigen kleinen AG waren. Der Schluß ist dann wieder etwas technischer.

1.Vortrag: Abelsche Varietäten (30 Minuten)
Einführung/Wiederholung abelscher Varietäten. Insbesondere sollen die folgenden Objekte eingeführt werden: der l-adische Tate-Modul ([3, Definition (10.2)]), die duale abelsche Varietät ([3, Theorem (6.18)]), Polarisationen (inklusive diverser Resultate über diese) ([3, Definition (11.6)], [3, Corollary (11.22)], [3, Proposition (11.25)],[3, Theorem (11.29)]), die Weil-Paarung ([6, Lemma 13.1, Beginn der Seite 58]) sowie abschließend Jakobische ([3, (6.8)]).

[1] gpohl@mathi.uni-heidelberg.de
[2] ja@math.uni-bonn.de

2.Vortrag: Semiabelsche Varietäten (60 Minuten)
§2 in [4]. Hierbei sollte nicht auf die technischen Details algebraischer Stacks eingegangen werden, stattdessen möchten wir so tun als seien diese Schemata.

3.Vortrag: Höhen (60 Minuten)
§3 in [4].

4.Vortrag: Isogenien (60 Minuten)
§4 in [4].

5.Vortrag: Endomorphismen (60 Minuten)
§5 in [4], zusammen mit den relevanten/notwendigen Teilen von [8].

6.Vortrag: Endlichkeitssätze (60 Minuten)
§6 in [4].

Literatur

[1] G. Cornell, J.H. Silverman, and M. Artin. *Arithmetic geometry.* Springer-Verlag, 1986.
[2] Pierre Deligne. Preuve des conjectures de Tate et de Shafarevitch (d'après G. Faltings). *Astérisque*, Vol. 1983/84(121-122):25–41, 1985. Seminar Bourbaki.
[3] Bas Edixhoven, Ben Moonen, and Gerard van der Geer. Draft for a book on abelian varietes. `https://www.math.ru.nl/~bmoonen/research.html`.
[4] G. Faltings. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. Math.*, 73(3):349–366, 1983.
[5] Gerd Faltings and Ching-Li Chai. *Degeneration of abelian varieties*, volume 22 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. With an appendix by David Mumford.
[6] James S. Milne. Abelian varieties (v2.00), 2008. Available at `www.jmilne.org/math/`.
[7] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric invariant theory*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1994.
[8] John Tate. Endomorphisms of abelian varieties over finite fields. *Invent. Math.*, 2:134–144, 1966.