KLEINE AG: DEFORMATIONEN ABELSCHER VARIETÄTEN

Organisatoren: Gregor Pohl[1], Nithi Rungtanapirom[2]

Ziel dieser kleinen AG ist es, die folgenden zwei Theoreme zu verstehen und beweisen:

Theorem 1. *Sei k ein Körper, und A/k eine abelsche Varietät der Dimension g. Dann ist der Deformationsfunktor von A glatt von Dimension g^2, und Deformationen haben keine infinitesimalen Automorphismen.*

Theorem 2. ***(Serre-Tate)*** *Sei p eine Primzahl, S ein Schema, auf welchem p lokal nilpotent ist, und A/S ein abelsches Schema. Dann gibt es eine Kategorienäquivalenz*

$$\{\textit{Deformationen von } A\} \cong \{\textit{Deformationen der } p\textit{-divisiblen Gruppe } A[p^\infty]\}.$$

Den Deformationsfunktor aus Theorem 1 kann man sich als die formale Umgebung von A im Modulraum abelscher Varietäten vorstellen, nur dass man diesen Modulraum nicht konstruiert haben muss, um dem Theorem Sinn zu geben. Sobald man den Modulraum konstruieren kann, sagt Theorem 1 aus, dass er glatt ist.

Während Theorem 1 abstrakt aussagt, dass das Deformationsproblem keine Obstruktionen hat, liefert Theorem 2 eine Möglichkeit, Deformationen explizit anzugeben. Das Resultat wird umso mächtiger, wenn man es mit Grothendieck-Messing-Theorie kombiniert, welche die Deformationstheorie p-divisibler Gruppen durch Kristalle ausdrückt, im Fall $S = k$ ein Körper also durch lineare Algebra über $W(k)$.

Eine weitere Verschärfung von Theorem 2 ist möglich, wenn A ordinär ist und $S = k$ ein perfekter Körper. In diesem Fall erhält der Deformationsfunktor die Struktur einer formalen Gruppe und man kann g^2 explizite Deformationsparameter in $1 + \mathfrak{m} \subset W(k)$ angeben. Dies ist grob analog zu der Situation über $\mathbb{C}$, wo eine abelsche Varietät ein komplexer Torus ist, und man die Koordinaten einer Basis eines Gitters in $\mathbb{C}^g$ deformiert.

Als Leitfaden dienen uns vier Blogbeiträge [5, 6, 7, 8] von Akhil Mathew.

Vortrag 1: Kohomologische Deformationstheorie (60 Minuten)

Grundlagen der Deformationstheorie sollen eingeführt werden, Ziel sind die drei Fakten über Deformationstheorie am Anfang von [7]. Hierzu kann man den Notizen von Martin Olsson [9] folgen, wo sie in "Summary 3.5" zusammengefasst sind.

Vortrag 2: Schlessingers Theorem (45 Minuten)

Vorstellen und Beweis von Schlessingers Kriterium. Entweder nach Schlessingers ursprünglicher Arbeit [10], oder nach Hartshorne[3].

[1] gpohl@mathi.uni-heidelberg.de
[2] rungtana@math.uni-frankfurt.de

Vortrag 3: Beweis von Theorem 1 (60 Minuten)
Beweis von Theorem 1 nach Mathew [5, 6, 7] und den dort genannten Quellen.

Vortrag 4: Theorem von Serre-Tate (60 Minuten)
Kurze Wiederholung der Definition p-divisibler Gruppen, danach der Beweis von Theorem 2. Wir möchten den vergleichsweise kurzen Beweis von Drinfeld verstehen, der im Anhang von [2] allerdings einen großen Teil der Arbeit dem Leser überlässt, daher folgen wir den Präsentationen in [4, 8]. Wir benötigen hier die Tatsache, dass $A[p^\infty]$ formal glatt ist. Tatsächlich besagt ein schwieriges Theorem von Messing, dass dies für alle p-divisiblen Gruppen über einer Basis mit p lokal nilpotent der Fall ist[3]. Um diese Blackbox zu umgehen, zeigen wir die formale Glattheit direkt mit dem Argument im Anhang.

Vortrag 5: Serre-Tate Lokale Koordinaten (45 Minuten)
Das "spezielle" Serre-Tate Theorem (also der Fall ordinärer abelscher Varietäten über einem perfektem Körper) soll erklärt werden. Dies ist Thm 2.1 in [4], und 2.19 in [1]; Die zweite Quelle hat einen sehr kurzen Beweis. Notwendige Grundlagen über p-divisible Gruppen (Cartier-Dualität, die connected-etale Folge, ordinäre p-divisible Gruppen) sollten vorher eingeführt werden. Hierzu können z.B. die Notizen von Stix [11] benutzt werden, knapp ist es auch in Kap. 10 von [1] erläutert.

Anhang

Sei S ein Schema, auf dem p lokal nilpotent ist, A/S ein abelsches Schema. Wir möchten die folgenden beiden Aussagen zeigen:

(1) $A[p^\infty]$ ist formal glatt über S.
(2) Die formale Umgebung der Einheit $S \to A[p^\infty]$ ist eine formale Gruppe über S, d.h. sie ist lokal durch das formale Spektrum eines Potenzreihenrings über S dargestellt.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass S quasikompakt ist, der Beweis funktioniert mit geringfügigen Änderungen aber auch im allgemeinen Fall. Für (1) betrachte also eine Aufdickung affiner S-Schemata $i : X_0 \hookrightarrow X$ zusammen mit einem S-Morphismus $f_0 : X_0 \to A[p^\infty]$. Wir müssen zeigen, dass sich dieser zu einem Morphismus $X \to A[p^\infty]$ fortsetzen lässt. Da A als abelsches Schema glatt über S ist, finden wir zumindest eine Fortsetzung $f : X \to A$ und wollen zeigen, dass diese bereits in $A[p^\infty]$ landet.
Wir können ohne Einschränkung $f_0 = 0$ annehmen, denn andernfalls können wir f_0 durch $p^n f_0$ und f durch $p^n f$ ersetzen, und für n hinreichend groß ist $p^n f_0 = 0$. Wir haben nun eine Faktorisierung $f : X \to Y \hookrightarrow A$ via dem schematheoretischen Bild $Y \hookrightarrow A$ von f, und da $f_0 = 0$, ist dieses via der Einheit $S \hookrightarrow A$ eine Aufdickung eines abgeschlossenen Unterschemas S' von S. Nach Basiswechsel können wir $S' = S$ annehmen. Es verbleibt zu zeigen, dass $Y \hookrightarrow A$ p-torsion ist.
Anders ausgedrückt möchten wir einsehen, dass jede Aufdickung des Einheitsschnitts $S \to A$, also jeder Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sch}_{S//S}}(Y, A)$ über und unter S, bereits p-torsion ist. Die Frage ist lokal und wir können $S = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} R'$ affin annehmen.

[3]Man mag sich an die kleine AG über Hodge-Tate-Zerlegungen erinnern, wo das Resultat (in etwas anderer Sprache) über dem formalen Spektrum eines vollständigen diskreten Bewertungsring der Restklassencharakteristik p bewiesen wurde.

Zunächst nehmen wir an, dass der Kern I von $p : R' \to R$ ein quadrat-null Ideal ist. Dann rechnet man leicht nach, dass kanonisch $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Ring}_{R//R}}(T, R') \cong \mathrm{Der}_R(T, I)$ für jede augmentierte R-Algebra T gilt. Insbesondere ist R' also ein abelsches Gruppenobjekt in $\mathrm{Ring}_{R//R}$, und sogar ein R-Modul[4].
Nun trägt also $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Sch}_{S//S}}(Y, A)$ zwei Gruppenstrukturen, eine von A und eine von Y. Nach Eckmann-Hilton stimmen die beiden überein. Da die Gruppe somit ein R-Modul ist, und p in R nilpotent ist, sehen wir wie gewünscht, dass sie p-torsion ist.
Gilt nun allgemein nicht mehr $I^2 = 0$ sondern nur noch $I^n = 0$ für irgendein n, so haben wir eine exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sch}_{S//S}}(Y', A) \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sch}_{S//S}}(Y, A) \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sch}_{S//S}}(Y'', A)$$

wobei $Y'' = \mathrm{Spec}\, R'/I^{n-1}$ und $Y' = \mathrm{Spec}\, R[I^{n-1}]$, mit $R[I^{n-1}] \subset R'$ die von I^{n-1} erzeugte Unteralgebra. In der Tat besteht der Kern der hinteren Abbildung aus genau den Morphismen, die sich modulo I^{n-1} zur Einheit, als Ringhomomorphismen aufgefasst also zur Projektion auf R, reduzieren. Induktiv können wir annehmen, dass die Aussage für die letzte Gruppe bekannt ist, und für die erste gilt sie, weil $R[I^{n-1}]$ eine quadrat-null Erweiterung von R ist.
Damit ist (1) gezeigt, und der Beweis zeigt auch (2), da wir sogar gesehen haben, dass die formale Umgebung der Einheit in $A[p^\infty]$ bereits die volle formale Umgebung der Einheit in A ist.

Literatur

[1] Ching-Li Chai and Frans Oort. Moduli of abelian varieties and p-divisible groups. *Arithmetic geometry*, 8:441–536, 2009.

[2] V. G. Drinfeld. Coverings of p-adic symmetric domains. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 10(2):29–40, 1976. engl. Übersetzung: `https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2FBF01077936.pdf`.

[3] R. Hartshorne. *Deformation Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2009.

[4] N. Katz. Serre-Tate local moduli. In *Algebraic surfaces (Orsay, 1976–78)*, volume 868 of *Lecture Notes in Math.*, pages 138–202. Springer, Berlin-New York, 1981.

[5] Akhil Mathew. Deformations of abelian varieties i: formalism. `https://amathew.wordpress.com/2012/06/19/deformations-of-abelian-varieties-i/`.

[6] Akhil Mathew. Deformations of abelian varieties ii: rigidity. `https://amathew.wordpress.com/2012/06/20/deformations-of-abelian-varieties-ii-rigidity/`.

[7] Akhil Mathew. Deformations of abelian varieties iii: smoothness. `https://amathew.wordpress.com/2012/06/21/deformations-of-abelian-varieties-iii-smoothness/`.

[8] Akhil Mathew. Deformations of abelian varieties iv: the serre-tate theorem. `https://amathew.wordpress.com/2012/06/22/deformations-of-abelian-varieties-iv-the-serre-tate-theorem/`.

[9] Martin Olsson. Tangent spaces and obstruction theories. `https://math.berkeley.edu/~molsson/MSRISummer07.pdf`.

[10] Michael Schlessinger. Functors of Artin rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 130:208–222, 1968.

[11] Jakob Stix. A course on finite flat group schemes and p-divisible groups. `https://www.uni-frankfurt.de/52288632/Stix_finflat_Grpschemes.pdf`.

[4] Tatsächlich gibt es sogar eine Kategorienäquivalenz zwischen (a) R-Moduln, (b) zerfallenden quadrat-null Erweiterungen von R, und (c) abelschen Gruppenobjekten in $\mathrm{Ring}_{R//R}$.